

Het Lee-Cartermodel voor  
sterfteprognose: een toepassing op de  
Nederlandse bevolking

En een vergelijking met het model van Cairns, Blake en Dowd

Bachelorscriptie Actuarieat

Peter Steur – 0513202

Universiteit van Amsterdam

Datum voltooiing: 13-06-2008

Docent: Prof. Dr. A.A.J. Pelsser

Studiejaar: 2007/2008

**Het Lee-Cartermodel voor sterfteprognose: een toepassing op de Nederlandse bevolking**

Bachelorscriptie Actuarieat

Peter Steur

Collegekaartnummer: 0513202

# Inhoud

1. Inleiding .....	1
2. Het Lee-Cartermodel .....	3
2.1. Opzet van het model .....	3
2.2. Fase 1: schatting basisparameters .....	4
2.3. Fase 2: herschatting sterfte-index .....	6
2.4. Fase 3: tijdreeksmodel .....	7
2.5. Fase 4: prognose .....	8
3. Toepassing Lee-Carter op Nederland .....	9
3.1. Gebruikte data .....	9
3.2. Fase 1: schatting basisparameters .....	10
3.3. Fase 2: herschatting sterfte-index .....	14
3.4. Fase 3: tijdreeksmodel .....	16
3.5. Fase 4: prognose .....	17
4. Analyse en vergelijking .....	21
4.1. Analyse resultaten Lee-Carter .....	21
4.2. Analyse resultaten Cairnsmodel en vergelijking .....	25
4.3. Levensverwachting .....	29
5. Conclusie .....	32
Bibliografie .....	33
Appendix .....	34

# 1. Inleiding

Bij de waardering en het risicobeheer van verzekeringen en pensioenen spelen sterftেকansen van de betreffende populatie en de prognose ervan een belangrijke rol. In Nederland publiceert het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) jaarlijks sterftetafels gebaseerd op de waargenomen sterfte in de bevolking. Voor toepassing in de actuariële wereld worden deze sterftetafels aangepast door het Actuarieel Genootschap (AG), de beroepsvereniging van actuarissen. Hierbij wordt het verloop van de sterftেকansen gladgestreken en worden bepaalde afrondingsmechanismen toegepast. Tussen opeenvolgende sterftetafels is een dalende trend in de sterftেকansen zichtbaar, mede veroorzaakt door de medische zorg die steeds beter wordt. Zo is bijvoorbeeld de levensverwachting van de Nederlandse man in de periode 1900-2000 gestegen van 47 jaar naar ruim 75 jaar. De daling van de sterftেকansen is een belangrijke oorzaak voor de vergrijzing in Nederland en de bijkomende economische gevolgen. Hierdoor wordt het voorspellen van sterftেকansen steeds belangrijker. Om dit soort trends in sterftetafels te verwerken en de sterftেকansen voor de toekomst te voorspellen kunnen verschillende prognosemodellen toegepast worden.

Lee en Carter hebben in 1992 een tijdreeksmodel ontwikkeld voor sterfteprognose op de lange termijn, gebaseerd op sterftecijfers uit het verleden (Lee-Carter, 1992). In deze scriptie wordt het Lee-Cartermodel onderzocht, om een beeld te vormen van de prognose van een dergelijk sterftemodel ten opzichte van de werkelijke sterftecijfers.

Op basis van historische data van Nederland (periode 1900-1975) wordt het Lee-Cartermodel geschat en wordt er een prognose van 30 jaar uitgevoerd naar het jaar 2005. Vervolgens worden de modeluitkomsten vergeleken met de gerealiseerde sterftecijfers van Nederland in de periode 1976-2005 (out-of-sample procedure). Daarnaast wordt in deze scriptie de 'performance' van het Lee-Cartermodel vergeleken met een ander model voor sterfteprognose, namelijk dat van Cairns, Blake en Dowd (Tol, 2008, nog te verschijnen), hierna genoemd het Cairnsmodel. De vraag die we

graag willen beantwoorden is de vraag welke van de twee modellen het beste is om de Nederlandse sterftekansen te voorspellen. Deze scriptie zal deze vraag echter niet kunnen beantwoorden, vanwege de vereenvoudigde modellen. In deze scriptie wordt alleen gekeken hoe succesvol de gesimplificeerde modellen achteraf zijn geweest bij toepassing op de Nederlandse populatie, waardoor we toch een beeld krijgen van hoe dit soort sterftemodellen in Nederland voorspellen.

In hoofdstuk 2 worden de onderliggende theorieën van het Lee-Cartermodel beschreven en toegelicht. Hoofdstuk 3 bevat een overzicht van de resultaten die verkregen zijn uit het onderzoek, toegepast op de Nederlandse populatie. De analyse van de resultaten van het Lee-Cartermodel vindt plaats in hoofdstuk 4. In dit hoofdstuk worden de resultaten van het Lee-Cartermodel ook vergeleken met het Cairnsmodel, waaruit vervolgens zal blijken hoe de twee modellen zich hebben gedragen in de Nederlandse situatie. In hoofdstuk 5 wordt tenslotte kort samengevat wat er geconcludeerd kan worden naar aanleiding van dit onderzoek.

## 2. Het Lee-Cartermodel

Bij een stochastisch sterfmodel zijn een aantal factoren van belang. In de eerste plaats moet het model een realistische projectie van de toekomstige sterfte geven. Daarnaast zijn factoren als transparantie, bruikbaarheid, inzichtelijkheid en objectiviteit ook van belang. Verder is het belangrijk dat er gebruik wordt gemaakt van algemeen geaccepteerde technieken. Bij de meeste beschikbare sterfmodellen wordt de informatie voor de projectie uit historische sterftecijfers gehaald.

In hun originele artikel (Lee-Carter, 1992) beschrijven Lee en Carter hun methode waarmee ze de sterfte in de Verenigde Staten hebben gemodelleerd en geprognoseerd. Dit tijdreeksmodel van Lee en Carter, dat in dit hoofdstuk wordt uitgediept, maakt gebruik van lineaire regressietechnieken om een fit te krijgen van de historische data. Vervolgens kunnen er dan sterfteprognoses gemaakt worden. In dit hoofdstuk komt de onderliggende theorie van het Lee-Cartermodel aan de orde en wordt het model uitgebreid beschreven. In paragraaf 2.1. wordt kort de modelopzet beschreven en in de paragrafen 2.2. tot en met 2.5. worden de vier fasen van het model doorlopen. Dit hoofdstuk vormt de basis voor het onderzoek dat in hoofdstuk 3 wordt beschreven.

### 2.1. Opzet van het model

De toepassing van het model kan worden opgedeeld in vier fasen. In de eerste fase worden de basisparameters van het model geschat. Vervolgens vindt in de tweede fase een herschatting plaats van één van de basisparameters, zodanig dat de verkregen schattingen uit het model ‘matchen’ met de geobserveerde data. In de derde fase van het model worden de schattingen van de basisparameters samen met de herschatte parameter gebruikt om een tijdreeksmodel te construeren. Tenslotte wordt in de laatste fase op basis van dit tijdreeksmodel een projectie naar de toekomst gemaakt van de

centrale sterftecijfers, waaruit vervolgens de éénjarige sterftekansen en levensverwachtingen afgeleid kunnen worden.

## 2.2. Fase 1: schatting basisparameters

In deze eerste fase van het model worden de parameters gedefinieerd en geschat, te beginnen met het centrale sterftecijfer. Laat  $m_{x,t}$  het waargenomen centrale sterftecijfer voorstellen voor leeftijdsgroep  $x$  in jaar  $t$  die als volgt wordt bepaald:

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{P_{x,t}} \quad (2.1)$$

Hierbij stelt  $D_{x,t}$  het aantal sterftegevallen van leeftijdsgroep  $x$  in jaar  $t$  voor en is  $P_{x,t}$  de populatie uit leeftijdsgroep  $x$  blootgesteld aan risico in jaar  $t$ . Het waargenomen centrale sterftecijfer  $m_{x,t}$  is dus gelijk aan het quotiënt van deze twee grootheden en wordt gemodelleerd door de volgende vergelijking:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t} \quad (2.2)$$

De logaritme van  $m_{x,t}$  wordt in vergelijking (2.2) gedefinieerd als de som van een leeftijdsspecifieke, tijdsafhankelijke component  $a_x$  en het product van een tijdsafhankelijke parameter  $k_t$  met een tweede leeftijdsspecifieke component  $b_x$ .

De eerste coëfficiënt  $a_x$  geeft het algemene sterftepatroon weer over de betreffende periode. De  $b_x$ -coëfficiënt laat zien hoe snel of hoe traag de sterfte verandert bij veranderingen van de algemene sterfte-index  $k_t$  (trendparameter). Dit wil zeggen dat hoe hoger de waarde van  $b_x$  voor een bepaalde leeftijdsgroep  $x$ , hoe gevoeliger het centrale sterftecijfer van die leeftijdsgroep is voor veranderingen in de sterfte-index. Dit is bijvoorbeeld voor de hele lage leeftijden het geval (zuigelingensterfte).

De parameter  $k_t$  is dus gedefinieerd als de algemene sterfte-index en bevat de trend over de tijd. Als de verandering van  $k_t$  lineair is, verandert  $m_{x,t}$  exponentieel.

Tenslotte is er nog een storingsterm  $e_{x,t}$  die de leeftijdsspecifieke invloeden bevat die niet in het model zijn opgenomen. Deze  $e_{x,t}$  zijn onafhankelijk en identiek normaal verdeeld met gemiddelde 0 en variantie  $\sigma_e^2$ . De reden dat de logaritme van  $m_{x,t}$  gemodelleerd wordt en niet de  $m_{x,t}$  zelf, is dat door het nemen van de logaritme het sterftecijfer nooit negatief zal zijn. Hierdoor liggen de sterftekansen altijd tussen 0 en 1, wat ook de bedoeling is.

Omdat de variabelen in het rechterlid van vergelijking (2.2) niet waarneembaar zijn, is het onmogelijk om dit model te fitten met de gewone kleinste kwadratenmethode. Deze methode minimaliseert het totaal van de gekwadraterde afwijkingen tussen de waarnemingen en de modelwaarden. Om toch een kleinste kwadratenoplossing te vinden, wordt er gebruik gemaakt van de zogenaamde ‘Singular Value Decomposition (SVD)’, toegepast op de genormaliseerde matrix van centrale sterftecijfers  $r_{x,t}$ . Met behulp van deze techniek uit de lineaire algebra kan een matrix  $M$  als volgt worden gefactoriseerd (Good, 1969):

$$M = U \Sigma V^T \quad (2.3)$$

De matrix  $\Sigma$  bevat de zogenaamde singuliere waarden op de diagonaal. Als de SVD wordt toegepast op de matrix  $r_{x,t}$ , kunnen uit de eerste kolom van de matrix  $U$  de  $k_t$ -parameters afgeleid worden. Uit de eerste kolom van de matrix  $V$ , de getransponeerde van  $V^T$ , worden de  $b_x$ -parameters afgeleid.

Bij het toepassen van de SVD op de matrix  $r_{x,t}$  worden echter wel als restricties gebruikt dat de som van de  $b_x$ -coëfficiënten gelijk is aan 1 en dat de som van de  $k_t$ -parameters gelijk is aan 0. Er zijn ook andere restricties mogelijk; deze worden uiteindelijk tegen elkaar weggedeeld. Uit deze restricties volgt dat  $a_x$  gelijk is aan het



rekenkundig gemiddelde van  $\ln(m_{x,t})$  over de tijd. De matrix  $r_{x,t}$  en de restricties worden in formulevorm als volgt gedefinieerd:

$$r_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - a_x \quad (2.4)$$

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t}) \quad , \quad \sum_x b_x = 1 \quad , \quad \sum_t k_t = 0$$

Hierbij is  $T$  het totaal aantal jaren van de basisperiode. Met behulp van het bovenstaande model kunnen voor een gegeven input van sterftedata de parameters  $a_x$ ,  $b_x$  en  $k_t$  geschat worden. Voor de parameter  $k_t$  vindt in de volgende paragraaf een herschatting plaats.

### 2.3. Fase 2: herschatting sterfte-index

In de eerste fase van het model zijn de schattingen gebaseerd op de logaritmen van de sterftecijfers in plaats van op de sterftecijfers zelf. Hierdoor genereren de schattingen van de parameters  $a_x$ ,  $b_x$  en  $k_t$  niet exact de sterfte-aantallen die ook daadwerkelijk geobserveerd zijn in de data.

De volgende stap in het model betreft dan ook een herschatting van de sterfte-index  $k_t$ , zodanig dat de totale sterfte-aantallen van het model in een bepaald jaar overeenkomen met de geobserveerde sterfte-aantallen in het betreffende jaar. De eerder geschatte coëfficiënten voor  $a_x$  en  $b_x$  blijven ongewijzigd. Er moet dus een  $k_t$  worden gevonden zodanig dat onderstaande vergelijking geldt:

$$D_t = \sum_x \left\{ \exp(a_x + b_x k_t) \cdot P_{x,t} \right\} \quad (2.5)$$

Hierbij is  $D_t$  het totaal aantal waargenomen sterftegevallen in jaar  $t$  en is  $P_{x,t}$  de populatie in leeftijdsgroep  $x$  (blootgesteld aan risico) in jaar  $t$ . De oplossing voor de geschatte  $k_t$ -parameter kan gevonden worden door middel van iteratie.

De reden voor de schatting van  $k_t$  is dat door de log-transformatie van  $m_{x,t}$  de lagere sterftecijfers van jongeren hetzelfde gewicht krijgen als de hogere sterftecijfers van ouderen. Alle leeftijdscategorieën worden dus gelijkwaardig behandeld. Het gedeelte jongeren van het totale aantal sterfgevallen in het betreffende jaar is echter veel kleiner dan het gedeelte ouderen. Bij de schatting wordt hier dus rekening mee gehouden. Na deze schatting zijn de parameters bekend die als basis dienen voor het tijdreeksmodel dat in de volgende paragraaf wordt beschreven.

#### 2.4. Fase 3: tijdreeksmodel

In de laatste twee fasen van het model komt de modellering en de prognose van de tijdreeks aan de orde. De schatting van de sterfte-index  $k_t$  wordt als een tijdreeks gemodelleerd met behulp van een Auto-Regressive Integrated Moving Average (ARIMA) tijdreeksmodel. Met een ARIMA-model kan een tijdreeks worden gemodelleerd en geprognosticeerd. Er zijn vele varianten van het ARIMA-model, waarbij de beste gekozen kan worden met behulp van de zogenaamde Box-Jenkinsmethodiek (Carter, 1996; Bell, 1997). Hierbij wordt de betreffende tijdreeks geanalyseerd en geïdentificeerd, wat leidt tot de beste variant van het ARIMA-model.

Vanwege de tijdsperiode van het in deze scriptie beschreven onderzoek wordt deze procedure hier niet toegepast, maar wordt de  $k_t$ -parameter gegenereerd als een ‘random walk’ met ‘drift’; een speciaal geval van het ARIMA-model<sup>1</sup>. Deze variant werd ook door Lee en Carter zelf gebruikt. Een random walk is een stochastisch proces waarvan de waarde op een bepaald tijdstip wordt bepaald door de waarde op het vorige tijdstip

---

<sup>1</sup> Dit model komt overeen met het ARIMA(0,1,0)-model.

en een ‘random’ variabele. De drift zorgt ervoor dat de sterftetrend over de tijd wordt opgenomen in de prognose. Dit leidt tot de volgende definitie van  $k_t$  :

$$k_t = k_{t-1} + c + u_t \quad (2.6)$$

Hierbij is  $c$  de constante drift-term en is  $u_t$  de random variabele. Op deze manier wordt iedere waarde van  $m_{x,t}$  gemodelleerd als een proces op basis van het tijdreeksmodel van  $k_t$ .

## 2.5. Fase 4: prognose

In de slotfase van het model wordt het tijdreeksmodel van  $k_t$  uit de vorige paragraaf gebruikt om de sterfte-index naar de toekomst te projecteren voor een bepaalde periode. Dit gebeurt door middel van extrapolatie van  $k_t$ . Om boven- en ondergrenzen te krijgen van de voorspelling, worden er 95% betrouwbaarheidsintervallen geconstrueerd. Met behulp van de voorspelde  $k_t$ -waarden en de eerder geschatte waarden voor  $a_x$  en  $b_x$  kunnen vervolgens de geprognosticeerde sterftecijfers  $m_{x,t}$  afgeleid worden.

In dit hoofdstuk is het Lee-Cartermodel stapsgewijs beschreven en toegelicht. Door het gebruiken van een (volledige) dataset met centrale sterftecijfers kunnen er nu sterfteprognoses gedaan worden. In het volgende hoofdstuk wordt dit gedaan op basis van historische sterftecijfers van de Nederlandse bevolking.

## 3. Toepassing Lee-Carter op Nederland

In dit hoofdstuk wordt het Lee-Cartermodel toegepast op data die betrekking hebben op Nederland. Het model wordt geschat op de wijze die in het vorige hoofdstuk is beschreven. Dezelfde vier fasen uit het vorige hoofdstuk worden ook in dit hoofdstuk doorlopen, nu gebruikmakend van een dataset met Nederlandse sterftcijfers.

In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk worden de in het onderzoek gebruikte data beschreven en toegelicht. In paragraaf 3.2. tot en met 3.5. volgt de presentatie van het Lee-Cartermodel toegepast op de data van Nederland.

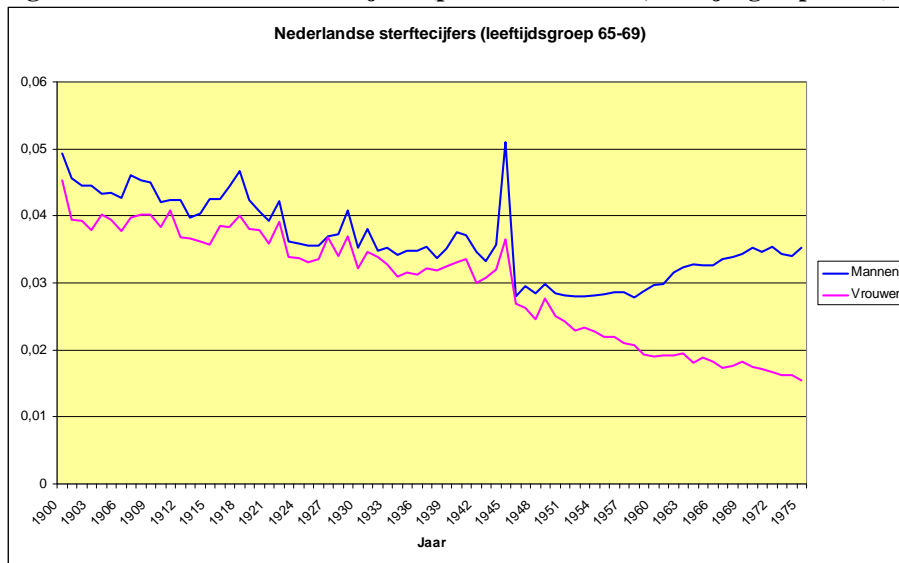
### 3.1. Gebruikte data

De datasets die worden gebruikt in dit onderzoek zijn ontleend aan de Human Mortality Database (HMD). Deze database bevat gedetailleerde sterfte- en populatiedata van ruim 30 landen. De datasets die in dit onderzoek worden gebruikt zijn de volgende:

- Netherlands, Death rates male/female (period), 1850-2006, 5x1.
- Netherlands, Deaths male/female, 1850-2006, 5x1.
- Netherlands, Exposure to risk male/female (period), 1850-2006, 5x1.

Deze drie datasets hebben betrekking op de periode 1850-2006 en zijn opgedeeld in vijfjarige leeftijdsgroepen (0, 1-4, 5-9, ..., 105-109, 110+). De datasets bevatten respectievelijk de Nederlandse centrale sterftcijfers, sterfte-aantallen en de populatie blootgesteld aan risico.

Voor het onderzoek worden de data uit de periode 1900-1975 uit de leeftijdsgroepen 0, 1-4, 5-9, ..., 85-89, 90-95 gebruikt. Om een beeld te krijgen bij deze datasets, worden de sterftcijfers voor leeftijdsgroep 65-69 in figuur 1 grafisch weergegeven.

**Figuur 1 – Nederlandse sterftcijfers (periode 1900-1975, leeftijdsgroep 65-69)**

We zien twee grote pieken in de jaren 1918 en 1945. In 1918 stierven veel Nederlanders als gevolg van de Spaanse griep en in 1945 ontstonden er veel overlijdensgevallen door de gevolgen van de Tweede Wereldoorlog. Hoe met deze twee gebeurtenissen wordt omgegaan, volgt in een latere paragraaf. Eerst zal weer - net als in het vorige hoofdstuk - stapsgewijs het model worden doorlopen.

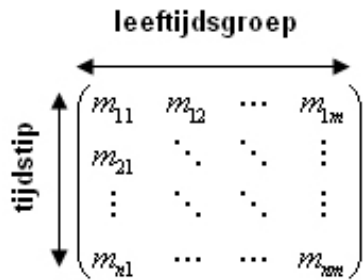
### 3.2. Fase 1: schatting basisparameters

Met de in de vorige paragraaf beschreven data kunnen nu de basisparameters van onderstaande modelvergelijking geschat worden.

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t} \quad x = 1, \dots, 20 \quad t = 1900, \dots, 1975 \quad (2.2)$$

De matrix  $m_{x,t}$  ziet er als volgt uit:

**Figuur 2 - Matrix centrale sterftcijfers ( $m_{x,t}$ )**



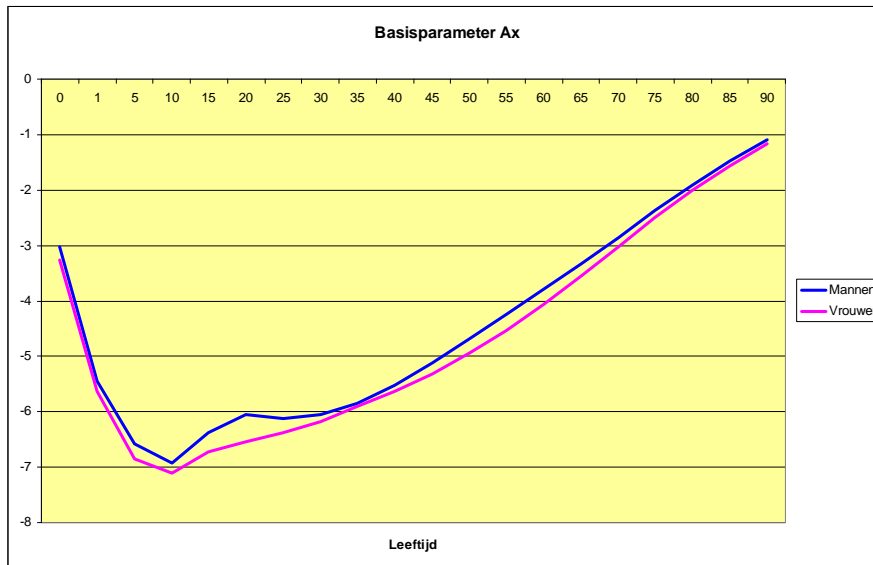
De matrix  $m_{x,t}$  heeft  $n$  rijen en  $m$  kolommen. De waarde  $m_{2,1901}$  betreft het centrale sterftcijfer in het jaar 1901 voor leeftijdsgroep 2 en komt overeen met element  $m_{22}$  van de matrix  $m_{x,t}$ . In de data worden de jaren 1900 tot en met 1975 gebruikt, waardoor er dus 76 tijdstippen zijn ( $n = 76$ ).

De gebruikte data bestaan verder uit 20 vijfjarige leeftijdsgroepen. Dit betekent dat  $m = 20$ . Hierbij komt leeftijdsgroep 3 bijvoorbeeld overeen met de leeftijdsgroep 5-9. Op deze manier ontstaat er voor het onderzoek twee  $76 \times 20$ -matrices (mannen en vrouwen) met centrale sterftcijfers. Deze matrices vormen de basis voor het schatten van de basisparameters  $a_x$ ,  $b_x$  en  $k_t$ .

De parameter  $a_x$  kan direct afgeleid worden uit  $m_{x,t}$ . In vergelijking (2.4) zien we dat onder de restricties  $\sum_x b_x = 1$  en  $\sum_t k_t = 0$  geldt dat  $a_x = \frac{1}{76} \sum_t \ln(m_{x,t})$ . Door het nemen van de logaritme van de centrale sterftcijfers en vervolgens voor iedere leeftijdsgroep  $x$  het gemiddelde over de tijd te nemen kunnen we de vector  $a_x$  bepalen.

De waarden van  $a_x$  zijn in figuur 3 grafisch weergegeven. De exacte waarden van  $a_x$  zijn opgenomen in tabel 1 van de Appendix. De parameter  $a_x$  geeft per leeftijdsgroep het algemene sterftepatroon weer.

**Figuur 3 - Schattingen van de basisparameter  $a_x$**



Voor de lage leeftijdsgroepen is te zien dat er een hogere sterfte is bij pasgeboren kinderen als gevolg van zuigelingensterfte. Verder is er een ‘bult’ rond leeftijd 20 van de mannen, vooral veroorzaakt door verkeersongelukken. Daarna is het verloop geleidelijk stijgend naarmate de leeftijd hoger wordt.

In vergelijking (2.4) wordt de matrix  $r_{x,t}$  gedefinieerd als  $r_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - a_x$ . Deze matrix is van belang om de parameters  $b_x$  en  $k_t$  te kunnen schatten. Op deze matrix wordt de SVD toegepast. Deze techniek uit de lineaire algebra is beschreven in het vorige hoofdstuk. Hierbij wordt de matrix  $r_{x,t}$  gefactoriseerd in drie matrices, waaruit vervolgens  $b_x$  en  $k_t$  afgeleid kunnen worden.

Uit de eerste kolom van de 20 X 20-matrix  $V$ , waarvan de getransponeerde volgt uit de SVD, leiden we de parameter  $b_x$  af. Hierbij moeten de  $b_x$ -waarden nog wel

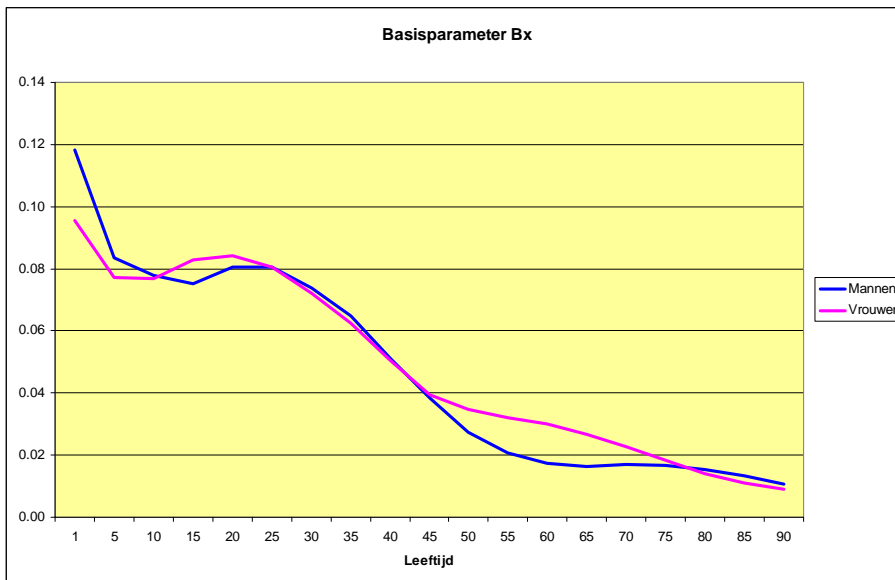
genormaliseerd worden, als gevolg van de restrictie  $\sum_x b_x = 1$ . We krijgen de volgende

vergelijking voor de vector  $b_x$ :

$$b_x = \frac{v_{x,1}}{\sum_i v_{i,1}}, \quad i = 1, \dots, 20 \quad (3.1)$$

De  $b_x$ -coëfficiënt laat zien hoe snel of hoe traag de sterfte verandert bij veranderingen van de algemene sterfte-index  $k_t$ . De  $b_x$ -waarden worden in figuur 4 grafisch weergegeven.

**Figuur 4 - Schattingen van de basisparameter  $b_x$**



We zien in figuur 4 voor lage leeftijden een hoge  $b_x$ -waarde. Dit wil zeggen dat voor deze leeftijden het centrale sterftecijfer relatief sterker reageert op veranderingen van  $k_t$  ten opzichte van hogere leeftijden.

Voor de hoge leeftijden zien we lage waarden voor  $b_x$ . Dit betekent dat voor hoge leeftijden de verandering van de algemene sterfte-index slechts een kleine invloed heeft op het centrale sterftecijfer van deze leeftijdsgroepen. Dit is ook te verwachten, want bijvoorbeeld de verbetering van de medische zorg zal voor de hoogste leeftijdsgroepen minder kunnen betekenen dan voor de lagere leeftijdsgroepen.

De schattingen voor de parameter  $k_t$  volgen net als de  $b_x$ -waarden uit de SVD. Deze parameter wordt afgeleid uit de eerste kolom van de  $76 \times 20$ -matrix  $U$  en uit het eerste element van de  $20 \times 20$ -matrix  $S$ , die beide uit de SVD volgen. Het eerste element van de matrix  $S$ , de eerste singuliere waarde, is gedefinieerd als  $s_{1,1}$ . Het



product van deze  $s_{1,1}$  met de eerste kolom van de matrix  $U$  gebruiken we nu om  $k_t$  af te leiden. Deze waarden moeten nog wel vermenigvuldigd worden met  $\sum_i v_{i,1}$ , omdat bij de  $b_x$ -parameter door deze uitdrukking gedeeld is. We krijgen nu de volgende vergelijking voor  $k_t$ :

$$k_t = s_{1,1} \cdot u_{t,1} \cdot \sum_i v_{i,1}, \quad i = 1, \dots, 20 \quad (3.2)$$

De  $k_t$ -parameter stelt de sterfte-index voor en is in figuur 5 en 6 grafisch weergegeven. In de volgende fase van het model zal een herschatting plaatsvinden van deze parameter. De exacte waarden van  $b_x$  en  $k_t$  zijn opgenomen in respectievelijk tabel 1 en 2 van de Appendix.

### 3.3. Fase 2: herschatting sterfte-index

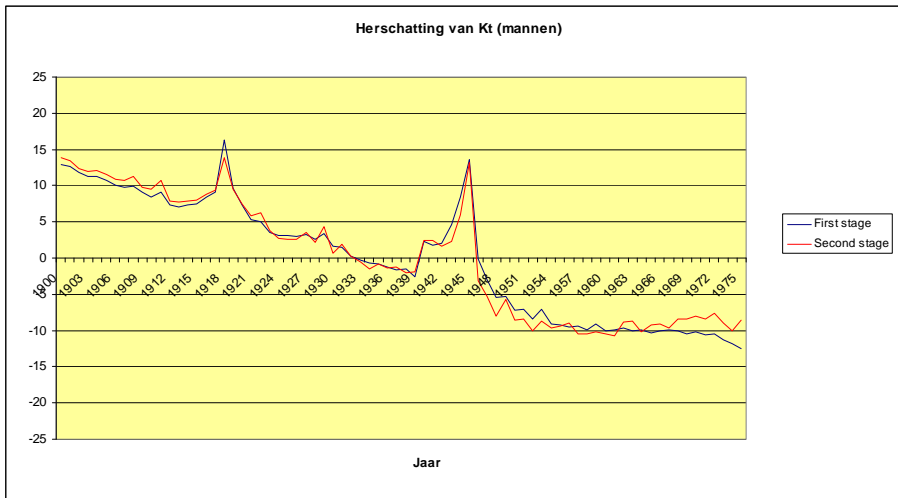
Zoals in het vorige hoofdstuk is toegelicht, zijn met de geschatte parameters uit paragraaf 3.2. de waargenomen sterfte-aantallen niet gelijk aan de door het model ‘gefite’ sterfte-aantallen. Om dit probleem op te lossen, vindt er door middel van iteratie een herschatting plaats van de sterfte-index  $k_t$ . Dit wordt ook wel de ‘second stage estimation’ genoemd. We zoeken dus naar  $k_t$ -waarden zodanig dat vergelijking (2.5) geldt. Deze zag er als volgt uit:

$$D_t = \sum_x \{ \exp(a_x + b_x k_t) \cdot P_{x,t} \} \quad (2.5)$$

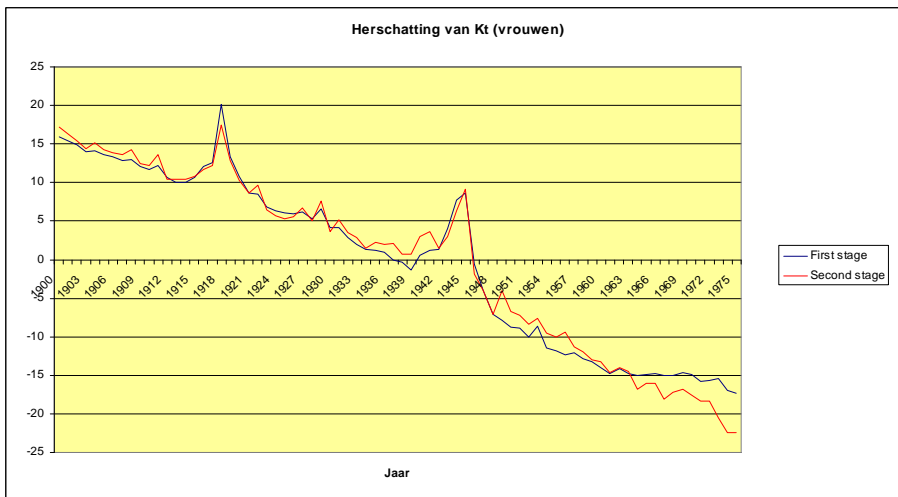
De waarden van  $D_t$  en  $P_{x,t}$  komen uit de laatste twee datasets die in paragraaf 3.1. zijn beschreven. Voor de waarden van  $a_x$  en  $b_x$  gebruiken we de eerder geschatte waarden uit de eerste fase van het model. Hiermee blijft in vergelijking (2.5) alleen de  $k_t$ -parameter nog als onbekende over.

Voor iedere  $t$  krijgen we op deze manier dus een herschatting van de  $k_t$ -parameter. De waarden zijn in figuur 5 en 6 grafisch weergegeven.

**Figuur 5 - Eerste en tweede fase schatting  $k_t$  (mannen)**



**Figuur 6 - Eerste en tweede fase schatting  $k_t$  (vrouwen)**



Bij de vrouwen zien we over de periode 1900-1975 een sterkere daling van de algemene sterfte-index dan bij de mannen.

De exacte waarden van de herschatting van  $k_t$  zijn opgenomen in tabel 3 van de Appendix. Met het herschatten van de  $k_t$ -parameter is de basis gelegd voor het tijdreeksmodel. Dit model komt in de derde fase van het model aan het orde, dat in de volgende paragraaf wordt beschreven.

### 3.4. Fase 3: tijdreeksmodel

Met de geschatte basisparameters kan nu het ARIMA-tijdreeksmodel worden geschat, zoals beschreven in paragraaf 2.4. In de grafiek van het sterftecijfer voor leeftijdsgroep 65-69 (zie figuur 1) zijn twee grote pieken te zien in 1918 en 1945. Bij het tijdreeksmodel kan overwogen worden om voor deze twee jaren dummyvariabelen te gebruiken, zodat deze twee pieken niet meegenomen worden in de schatting van het model. In dit onderzoek wordt dit echter niet gedaan, want de onzekerheid dat een epidemie (bijvoorbeeld de vogelgriep) in de toekomst voor een hoger sterftecijfer gaat zorgen wordt ook in het model meegenomen.

Het ARIMA-model kan geschat worden met behulp van statistische software. In dit onderzoek wordt het softwarepakket EViews gebruikt, waarvan de output is opgenomen in tabel 5 van de Appendix. Hieronder volgt een overzicht van de belangrijkste elementen van de output:

**Tabel 1 - EViews output**

Geslacht	Variabele	Coëfficiënt	Standaard fout	t-statistic	p-waarde	SEE
Man	C	-0,299352	0,297146	-1,007422	0,317000	2,573364
Vrouw	C	-0,527173	0,240263	-2,194151	0,031400	2,080739

Voor mannen zien we aan de hoge p-waarde dat de simpele variant van het ARIMA model een slechte fit geeft van de  $k_t$ -waarden. Bij de vrouwen is de fit een stuk minder slecht, wat ook is te verwachten door het meer lineaire verloop van de  $k_t$ -waarden (figuur 6). De SEE stelt de ‘Standard Error of Estimation’ voor, oftewel de standaardfout van de regressie. Deze wordt in de volgende paragraaf gebruikt bij de constructie van de betrouwbaarheidsintervallen.

### 3.5. Fase 4: prognose

Op basis van het in de vorige paragraaf beschreven tijdreeksmodel kan nu de prognose worden gemaakt. Met behulp van de ‘standaardfout van de regressie (SEE)’, die volgt uit de EViewsoutput van de vorige paragraaf, kunnen 95%-betrouwbaarheidsintervallen geconstrueerd worden. De verzameling waarden binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval zal in 95% van de gevallen de werkelijke waarde van de parameter bevatten.

De SEE’s zijn voor zowel mannen en vrouwen aan de hoge kant, wat leidt tot een grote onzekerheid in de prognose. De standaardfout van de geprognosticeerde  $k_t$  is als volgt gedefinieerd:

$$se_t = \sqrt{s} \cdot SEE \quad s = 1, 2, \dots, 30 \quad (3.3)$$

Hierbij is  $s$  gelijk aan het aantal jaren dat vooruit is geprognosticeerd. In dit onderzoek wordt geprognosticeerd voor de periode 1975-2005, dus is bijvoorbeeld voor de prognosewaarde in het jaar 1990 de waarde voor  $se_{1990}$  gelijk aan:

$$\sqrt{1990-1975} \cdot SEE = \sqrt{15} \cdot SEE$$

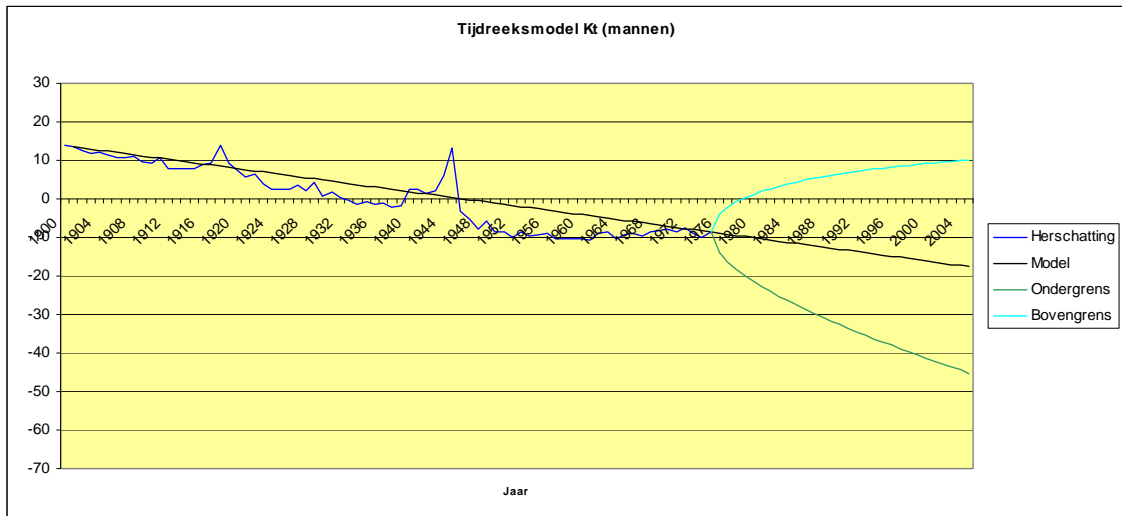
De ondergrens en bovengrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval zijn nu als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \text{Ondergrens}(k_t) &= k_t - 1,96 \cdot se_t \\ \text{Bovengrens}(k_t) &= k_t + 1,96 \cdot se_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

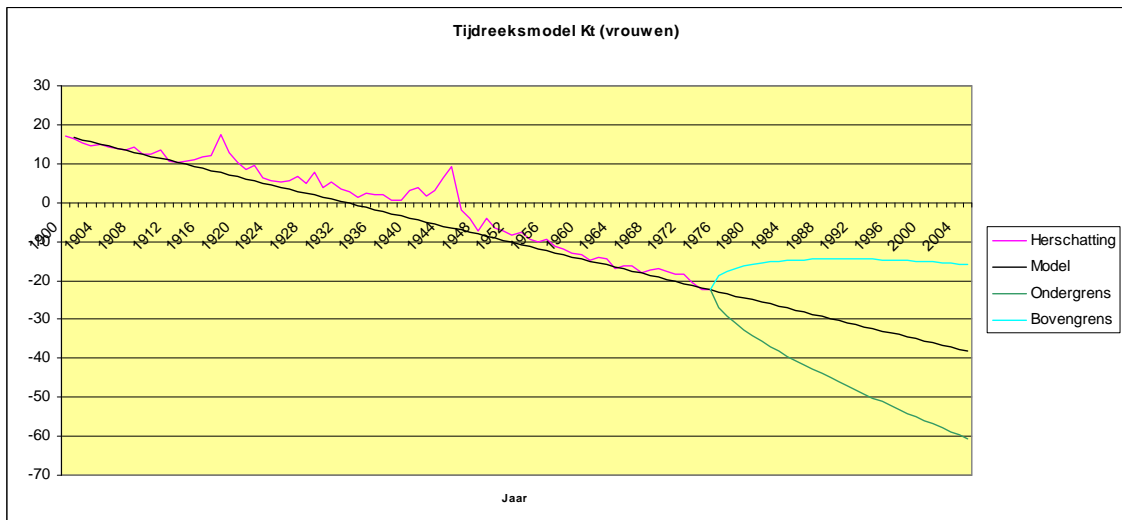
Hierbij is 1,96 gelijk aan die waarde van een standaardnormale stochast waarbij de kans dat je boven deze waarde uitkomt gelijk is aan 0,025 (= (1-0,95)/2).

De waarden van de geprognosticeerde  $k_t$  zijn samen met de bovengrens en de ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval grafisch weergegeven in figuur 7 (mannen) en figuur 8 (vrouwen).

**Figuur 7 – Tijdreeksmodel en prognose  $k_t$  (mannen)**



**Figuur 8 - Tijdreeksmodel en prognose  $k_t$  (vrouwen)**



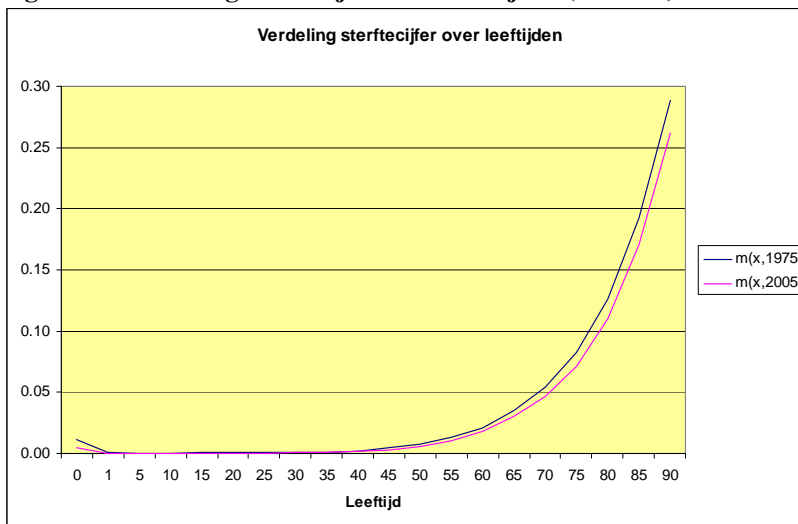
We zien dat door de hogere  $se_t$  voor mannen het betrouwbaarheidsinterval een stuk breder is dan bij de vrouwen.

Om de uiteindelijke prognose van de centrale sterftcijfers te krijgen, moeten de geprognosticeerde  $k_t$ -waarden worden gesubstitueerd in vergelijking (3.5).

$$\begin{aligned}
 m_{x,1975+s} &= \exp\{\ln(m_{x,1975}) + b_x \cdot (k_{1975+s} - k_{1975})\} \\
 &= \exp\{\ln(m_{x,1975})\} \cdot \exp\{b_x \cdot (k_{1975+s} - k_{1975})\} \\
 &= m_{x,1975} \cdot \exp\{b_x \cdot (k_{1975+s} - k_{1975})\}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Het laatste geobserveerde centrale sterftcijfer  $m_{x,1975}$  wordt dus als initiële waarde genomen voor de prognose. In Figuur 9 is te zien hoe volgens het model de verdeling van de sterftcijfers over de leeftijden eruit ziet in het jaar 1975 en in het jaar 2005.

**Figuur 9 – Verdeling sterftcijfers over leeftijden (mannen)**



Uit deze grafiek kunnen we concluderen dat er volgens de prognose van het model tussen het jaar 1975 en 2005 relatief weinig gebeurt met de centrale sterftcijfers die betrekking hebben op de leeftijden 1 tot en met 30. Deze grafiek is voor vrouwen soortgelijk, en wordt hier dan ook niet weergegeven.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het sterftcijfer wordt berekend met behulp van onderstaande formules:

$$\begin{aligned}
 \text{Ondergrens}(m_{x,1975+s}) &= \exp\{\ln(m_{x,1975+s}) + b_x \cdot \text{Ondergrens}(k_{1975+s})\} \\
 &= \exp\{\ln(m_{x,1975+s}) + b_x \cdot -1,96 \cdot se_{1975+s}\} \\
 &= m_{x,1975+s} \cdot \exp\{-1,96 \cdot b_x \cdot se_{1975+s}\}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\text{Bovengrens}(m_{x,1975+s}) &= \exp\{\ln(m_{x,1975+s}) + b_x \cdot \text{Bovengrens}(k_{1975+s})\} \\
&= \exp\{\ln(m_{x,1975+s}) + b_x \cdot +1,96 \cdot se_{1975+s}\} \\
&= m_{x,1975+s} \cdot \exp\{+1,96 \cdot b_x \cdot se_{1975+s}\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Substitutie van de geprognosticeerde  $k_t$ -waarden leidt tot de uiteindelijke prognoses van de centrale sterftecijfers voor de periode 1976-2005. Deze worden in het volgende hoofdstuk nader bekeken en vergeleken met de resultaten van het Cairnsmodel.

## 4. Analyse en vergelijking

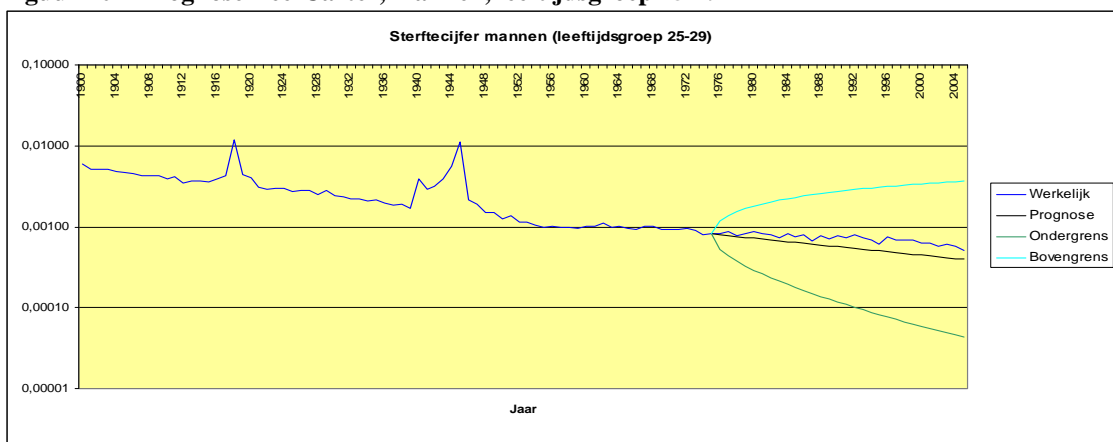
In het vorige hoofdstuk is beschreven hoe het Lee-Carter model is toegepast op de Nederlandse bevolking. In dit hoofdstuk worden de uiteindelijke door het Lee-Cartermodel voorspelde centrale sterftekansen geanalyseerd (paragraaf 4.1). In paragraaf 4.2. worden de resultaten van het Cairnsmodel (Cairns e.a., 2005) gepresenteerd en geanalyseerd. Hier volgt ook een vergelijking van de resultaten van het Cairnsmodel met die van het Lee-Cartermodel. In de aanvullende paragraaf 4.3. wordt beschreven hoe sterftecijfers omgerekend kunnen worden naar levensverwachtingen.

### 4.1. Analyse resultaten Lee-Carter

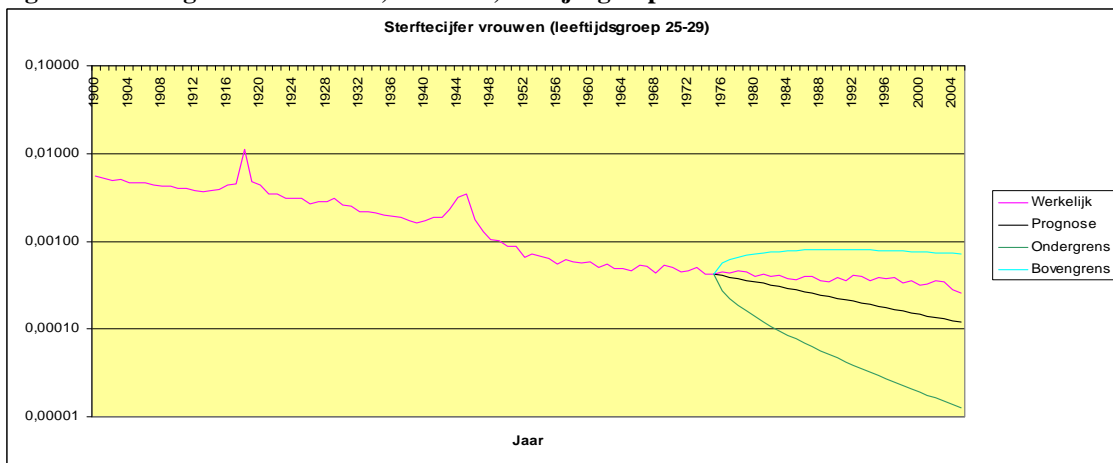
In de figuren 10 tot en met 15 zijn de prognoses van de Nederlandse sterftecijfers weergegeven op basis van het Lee-Cartermodel, samen geplot met de werkelijke sterftekansen uit de periode 1900-2005 en de betrouwbaarheidsintervallen. In de volgende paragraaf worden de uitkomsten van het Cairnsmodel gepresenteerd. We bekijken de leeftijdsgroepen 25-29, 45-49 en 65-69. De grafieken zijn weergegeven op logaritmische schaal.



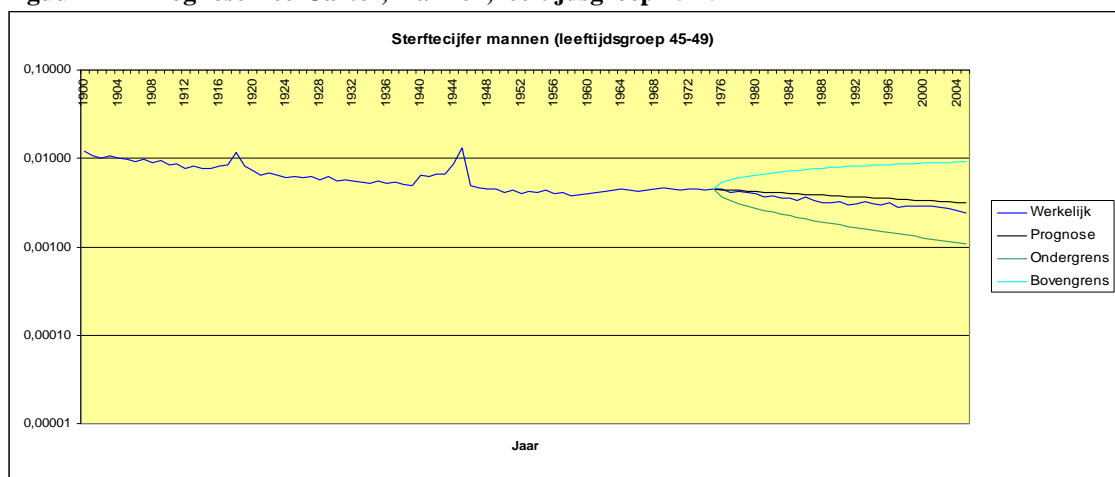
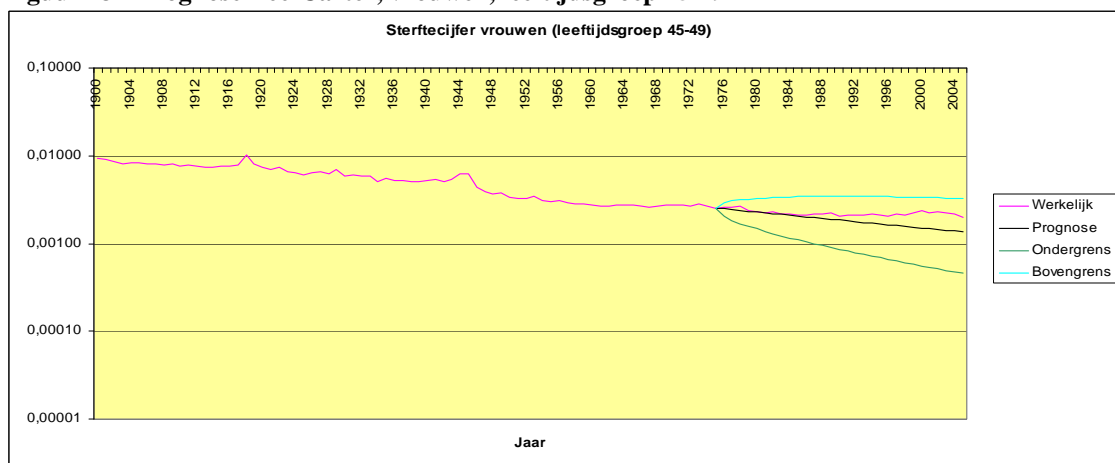
**Figuur 10 – Prognose Lee-Carter, mannen, leeftijdsgroep 25-29**



**Figuur 11 - Prognose Lee-Carter, vrouwen, leeftijdsgroep 25-29**

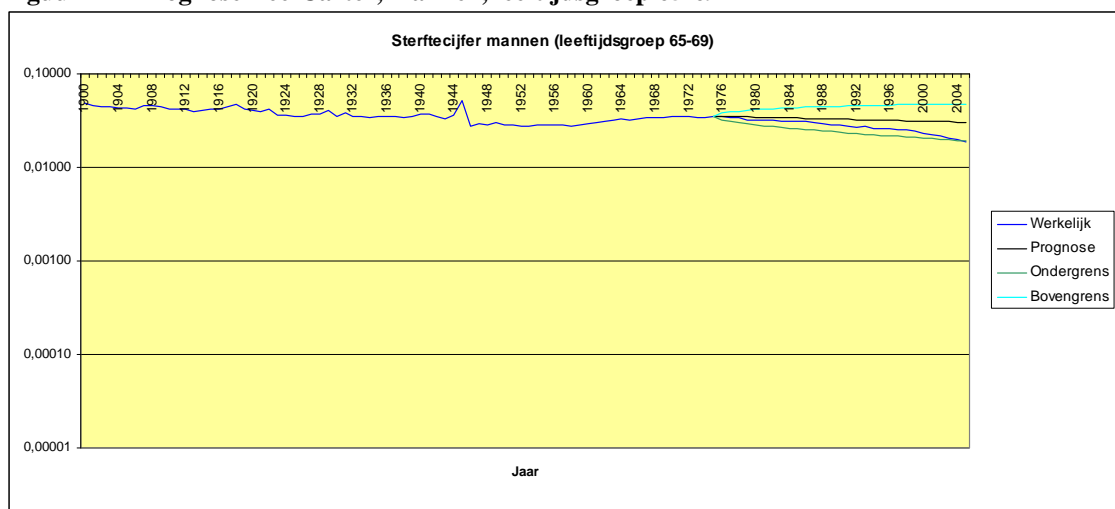


Voor de leeftijdsgroep 25-29 zien we dat de prognose van het model een overschatting is geweest van de werkelijkheid, zowel voor mannen als voor vrouwen. De daling van het sterftecijfer voor deze leeftijdsgroep is niet zo sterk geweest als het model voorspelde door de trend te extrapoleren. Bij vrouwen is de overschatting nog sterker dan bij mannen.

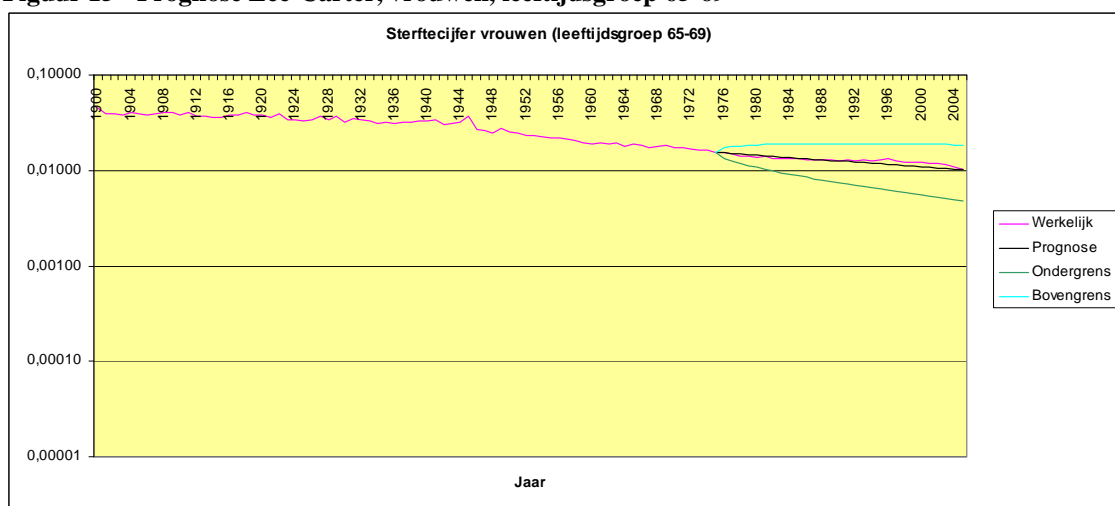
**Figuur 12 – Prognose Lee-Carter, mannen, leeftijdsgroep 45-49****Figuur 13 - Prognose Lee-Carter, vrouwen, leeftijdsgroep 45-49**

Bij de hogere leeftijdsgroepen zien we duidelijke verschillen tussen mannen en vrouwen. Bij leeftijdsgroep 45-49 is bij de mannen het werkelijke sterftcijfer sterker gedaald dan het model voorspelde, het model heeft hier de sterftedaling dus onderschat. Bij de vrouwen zien we echter hetzelfde verschijnsel als in leeftijdsgroep 25-29. Ook hier zijn de werkelijke sterftekansen in de periode 1976-2005 hoger geweest dan het model heeft geprojecteerd.

**Figuur 14 - Prognose Lee-Carter, mannen, leeftijdsgroep 65-69**



**Figuur 15 - Prognose Lee-Carter, vrouwen, leeftijdsgroep 65-69**



Tenslotte zien we in leeftijdsgroep 65-69 bij de mannen dat de sterftekansen een stuk sterker zijn gedaald dan volgens het model. In het jaar 2005 loopt de werkelijke sterftecijfer zelfs uit het toch al brede 95%-betrouwbaarheidsinterval. Hier is dus sprake van een sterke onderschatting van de werkelijkheid. Bij de vrouwen is voor deze leeftijdsgroep de afwijking van de prognosecurve ten opzichte van de werkelijke curve veel kleiner.

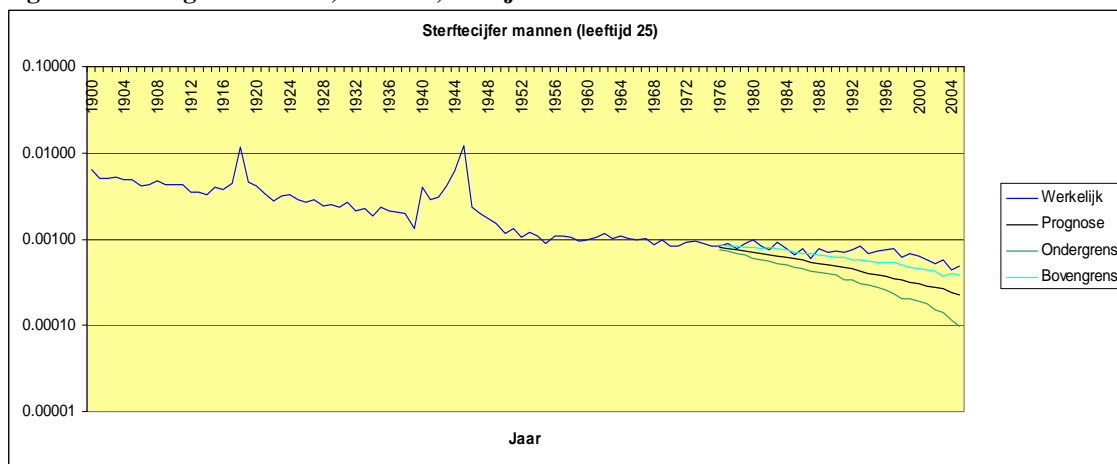
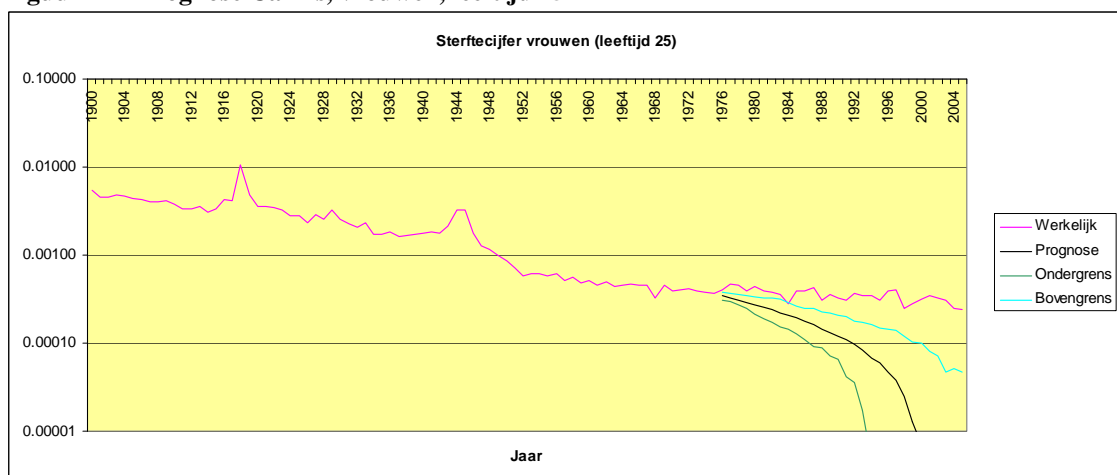
Bij bovenstaande prognoses is de onzekerheid steeds groot, waardoor brede betrouwbaarheidsintervallen ontstaan. Door een andere variant van het ARIMA-tijdreeksmodel te kiezen, die volgt uit identificatie van de tijdreeks  $k_t$ , kan een betere fit worden verkregen van het model, waardoor de onzekerheid, en daarmee de breedte van het betrouwbaarheidsinterval, afneemt (Lee, 2000; Booth e.a., 2006). Verder zou er in plaats van de periode 1900-1975 voor een andere, kortere basisperiode gekozen kunnen worden (bijvoorbeeld 1950-1975). Deze basisperiode is bepalend voor de trend die uit het model komt en dus ook voor de uiteindelijke prognose.

Door de grote onzekerheid die met de prognose gepaard gaat geeft het Lee-Cartermodel dus een heel breed betrouwbaarheidsinterval. Daardoor kunnen er weinig krachtige conclusies getrokken worden met betrekking tot toekomstige voorspellingen. De twijfel dat de toekomstige sterftekans niet of weinig afhankelijk zijn van de historische sterftekans kan hierdoor toenemen. Het is ook helemaal niet zo vanzelfsprekend dat de toekomstige sterftekans afhankelijk zijn van de sterftetrend van een historische periode.

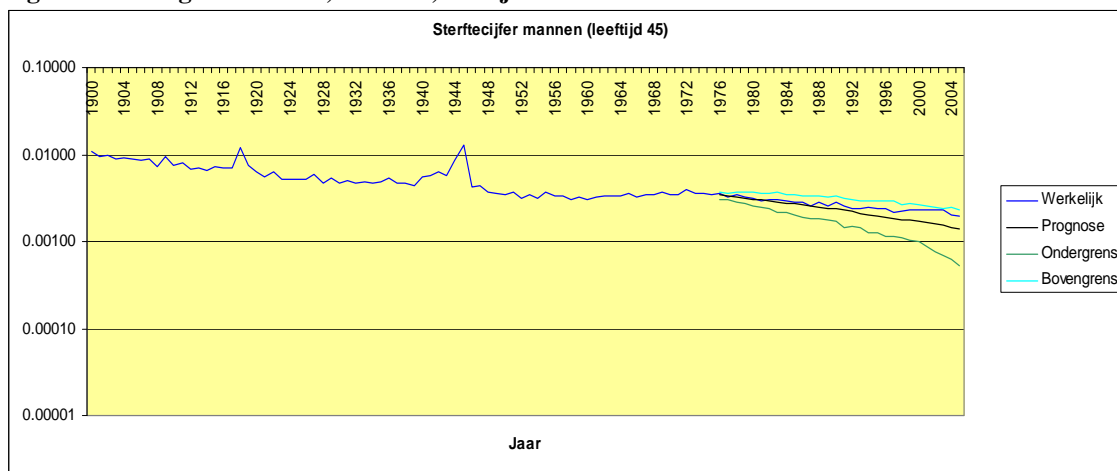
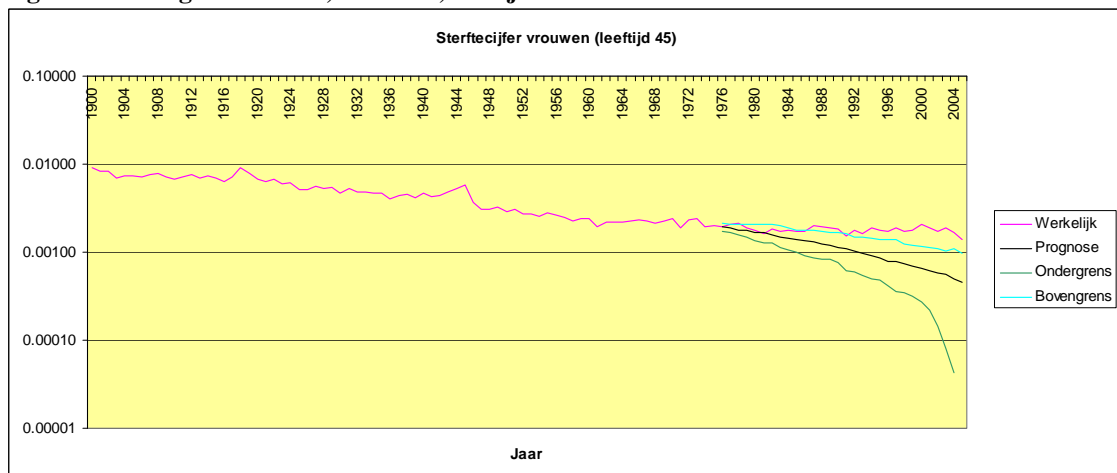
In de volgende paragraaf worden de resultaten van het Cairnsmodel geanalyseerd en vergeleken met de resultaten van het Lee-Cartermodel.

#### **4.2. Analyse resultaten Cairnsmodel en vergelijking**

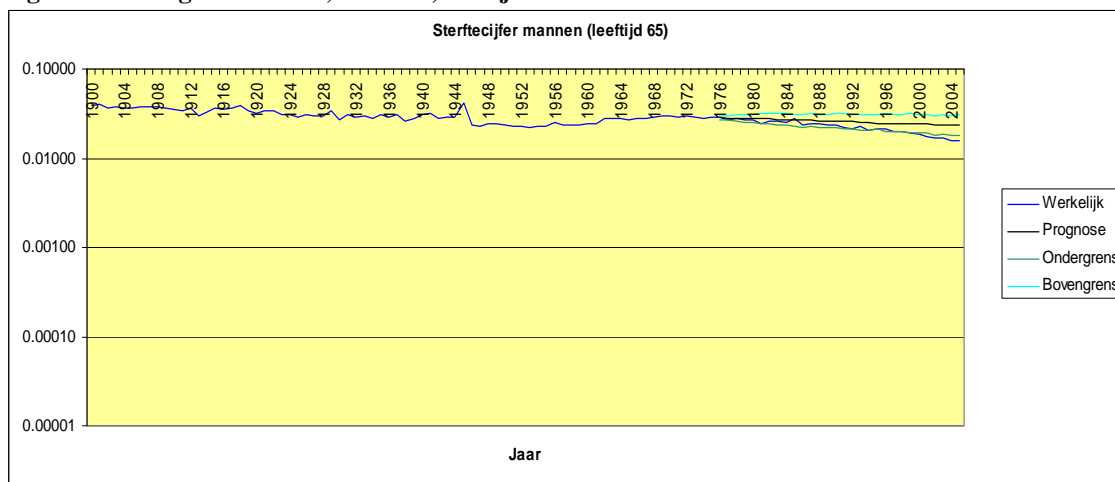
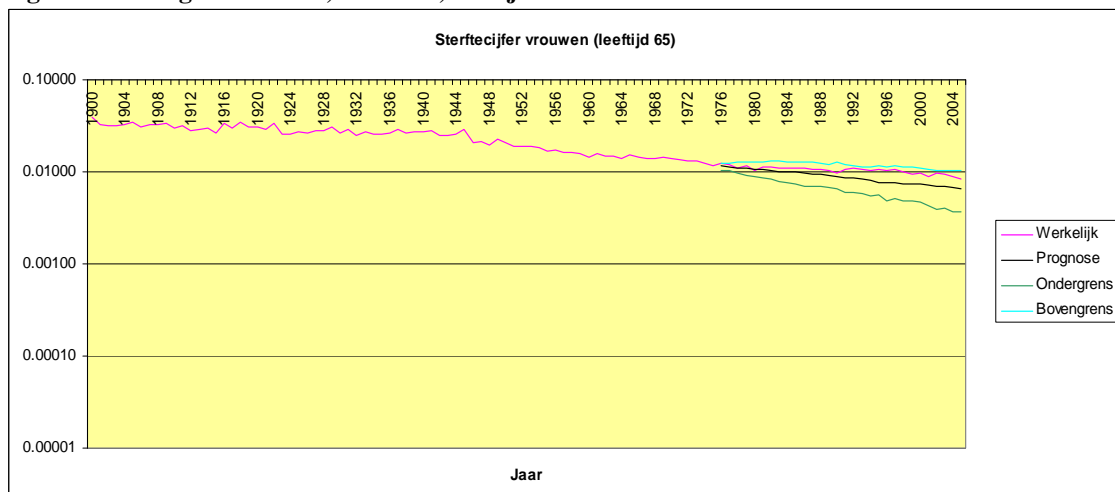
In de figuren 16 tot en met 21 zijn de resultaten van het Cairnsmodel (Tol, 2008, nog te verschijnen) weergegeven. Bij dit model worden in de data geen leeftijdsgroepen gebruikt, maar worden de sterftekans per leeftijd voorspeld (Cairns e.a., 2005). De grafieken zijn daarom weergegeven voor de leeftijden 25, 45 en 65. Ook nu worden deze weergegeven op logaritmische schaal. Bij dit model worden de prognose en het betrouwbaarheidsinterval geconstrueerd door middel van simulaties.

**Figuur 16 – Prognose Cairns, mannen, leeftijd 25****Figuur 17 - Prognose Cairns, vrouwen, leeftijd 25**

Net als het Lee-Cartermodel, geeft ook het Cairnsmodel voor leeftijd 25 een overschatting van de werkelijkheid en is deze overschatting bij vrouwen groter dan bij mannen. Opmerkelijk is echter dat bij het Cairnsmodel de werkelijke sterftecijfercurve bijna helemaal buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval loopt. Het Lee-Cartermodel geeft door middel van het brede betrouwbaarheidsinterval aan dat er een grote onzekerheid gepaard gaat met de prognose.

**Figuur 18 - Prognose Cairns, mannen, leeftijd 45****Figuur 19 - Prognose Cairns, vrouwen, leeftijd 45**

Bij de mannen van leeftijd 45 zien we dat het Cairnsmodel achteraf een betere prognose heeft gemaakt dan het Lee-Cartermodel. Met een smaller betrouwbaarheidsinterval dan het Lee-Cartermodel zit het Cairnsmodel bij deze leeftijd aardig in de buurt. Bij de vrouwen zien we daarentegen weer – net als bij leeftijd 25 – een sterke overschatting van het model. Ook hier loopt de werkelijke sterftecijfercurve voor het grootste gedeelte buiten het betrouwbaarheidsinterval.

**Figuur 20 - Prognose Cairns, mannen, leeftijd 65****Figuur 21 - Prognose Cairns, vrouwen, leeftijd 65**

Bij de mannen van leeftijd 65 zien we hetzelfde verschijnsel als bij het Lee-Cartermodel. Beide modellen onderschatten de sterftedaling en de werkelijke sterftecurve loopt aan het einde van de prognoseperiode het betrouwbaarheidsinterval uit. Bij de vrouwen is bij het Cairnsmodel de afwijking van de werkelijke sterftecurve ten opzichte van de prognosecurve iets groter dan bij het Lee-Cartermodel, echter het Cairnsmodel heeft een smaller betrouwbaarheidsinterval, waardoor er meer zekerheid met de prognose gepaard gaat.

Beide modellen zijn achteraf dus niet echt succesvol geweest bij toepassing op Nederland. Bij het Lee-Cartermodel ligt in de meeste gevallen de werkelijke sterftecurve nog wel binnen het geschatte betrouwbaarheidsinterval, maar dit is ook wel

te verwachten bij een dusdanige breedte van deze intervallen. Het Cairnsmodel denkt met meer zekerheid te weten welke richting de sterftekansen op gaan, maar heeft het in sommige gevallen helemaal mis. Hieruit zou geconcludeerd kunnen worden dat het Lee-Cartermodel achteraf het minst slecht geweest is, omdat dit model - door middel van de brede betrouwbaarheidsintervallen - tenminste ‘toegeeft’ dat er een slechte fit is en dat er een hoge onzekerheid meespeelt in de prognose.

Om een beeld te krijgen van wat deze prognoses betekenen voor de levensverwachting bij geboorte, volgt in de volgende paragraaf een beschrijving van hoe de waarden voor  $m_{x,t}$  kunnen worden geconverteerd in levensverwachtingen.

#### 4.3. Levensverwachting

Omdat een levensverwachting meer tot de verbeelding spreekt dan een sterftekans, wordt in deze afsluitende paragraaf beschreven hoe de levensverwachting in een bepaald jaar kan worden benaderd gegeven een set sterftecijfers.

Om de sterftecijfers te converteren naar levensverwachtingen, moeten de centrale sterftecijfers  $m_x$  eerst omgezet worden naar sterftekansen  $q_x$ . De exacte relatie tussen  $q_x$  en  $m_x$  is als volgt:

$$q_x = 1 - e^{-m_x} \quad (4.1)$$

Vanwege de verschillende leeftijdsgroepen in de data, gebruiken we voor deze conversie onderstaande benadering (Renshaw, 2003):

$$q_x \cong \frac{w_x m_x}{1 + (1 - f_x) w_x m_x} \quad (4.2)$$

De kans  $q_x$  stelt dan de kans voor dat een individu overlijdt in het betreffende leeftijdsinterval. Hierbij stelt  $w_x$  het aantal leeftijden in leeftijdsgroep  $x$  voor en is  $f_x$  gelijk aan het gemiddelde aantal jaren dat in het betreffende leeftijdsinterval geleefd is



bij overlijden in leeftijdsgroep  $x$ . In deze berekening wordt voor het eerste leeftijdsinterval (0-1) als benadering de waarde voor  $f_x$  gelijkgesteld aan 0,15, voor de overige leeftijdsintervallen nemen we  $f_x = 0,5$ .

De overlevingskans  $p_x$  is nu gelijk aan  $1 - q_x$ . Met deze gegevens kan voor ieder jaar een overlevingstafel geconstrueerd worden met behulp van onderstaande formules:

$$\begin{aligned} l_{x+w_x} &= l_x p_x \\ d_x &= l_x - l_{x+w_x} = l_x q_x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hierbij stelt  $l_x$  het aantal overlevenden in jaar  $x$  voor (met  $l_0 = 100.000$ ) en is  $d_x$  de verdeling van aan het aantal sterftegevallen van leeftijd  $x$  van de fictieve overlevingstafel populatie van 100.000 personen.

Vervolgens is het aantal 'levensjaren' in het leeftijdsinterval beginnend met leeftijd  $x$  gelijk aan:

$$L_x = w_x (l_x - (1 - f_x) d_x) \quad (4.4)$$

De resterende levensduur en de levensverwachting van een individu met leeftijd  $x_t$  zijn nu gelijk aan:

$$T_{x_t} = \sum_{x=x_t}^{x_{\max}} L_x \quad (4.5)$$

$$e_{x_t} = \frac{T_{x_t}}{l_{x_t}} \quad (4.6)$$

De levensverwachting bij geboorte is gedefinieerd als:

$$e_0 = \frac{\sum L_x}{100.000} \quad (4.7)$$

Als we bovenstaande procedure toepassen op de uitkomsten van het Lee-Cartermodel toegepast op Nederland krijgen we de onderstaande levensverwachtingen:

**Tabel 2 - Levensverwachtingen bij geboorte**

Geslacht	e0 (1976)	e0 (1976)	e0 (2005)	e0 (2005)
	werkelijk	prognose	werkelijk	prognose
Man	71,48	71,54	77,08	74,37
Vrouw	77,72	77,72	81,12	81,53

Voor de mannen zien we een onderschatting van de levensverwachting, bij de vrouwen een lichte overschatting.

In deze slotparagraaf is beschreven op welke wijze een set centrale sterftcijfers omgezet kan worden in levensverwachtingen. Het volgende afsluitende hoofdstuk bevat de conclusies die uit het onderzoek zijn gekomen.

## 5. Conclusie

Met de methode van Lee en Carter kan een sterftemodel geconstrueerd worden voor Nederland. In dit onderzoek is dit gedaan op basis van Nederlandse data van het jaar 1900 tot en met het jaar 1975. Vervolgens is er een prognose gemaakt van de sterftecijfers naar het jaar 2005 (30 jaar vooruit).

Bij het modelleren van een simpele variant van een ARIMA-tijdreeksmodel blijkt echter dat het model een slechte fit geeft van de data. Het model voor vrouwen heeft wel een iets minder slechte fit dan het model voor mannen. De fit zou verbeterd kunnen worden door een meer complex tijdreeksmodel te gebruiken. Ook kan worden overwogen om een andere historische periode te kiezen, die als basis dient voor de trendbepaling van het model. Dit kan effect hebben op de uiteindelijke voorspelde sterftekansen.

Door de slechte fit van het model ontstaat er een grote onzekerheid in de prognose, waardoor brede betrouwbaarheidsintervallen ontstaan. Hierdoor zijn beweringen naar aanleiding van de prognose een stuk minder krachtig. Als we naar een ander sterftemodel kijken (Cairns, Blake en Dowd) op basis van dezelfde data zien we dat dit model smallere betrouwbaarheidsintervallen heeft, maar achteraf slechte prognoses. Het Cairnsmodel geeft dus met meer zekerheid bepaalde prognoses, terwijl de werkelijke sterftecurves in veel gevallen het betrouwbaarheidsinterval uitlopen. We kunnen dus concluderen dat zowel het Lee-Carter model als het Cairnsmodel achteraf niet succesvol is geweest bij toepassing op Nederlandse data, wat voor een groot deel te wijten is aan de simplificaties in de modellen. Het doortrekken van een trend uit het verleden naar de toekomst leidt slechts in enkele gevallen tot een redelijke voorspelling. Het is ook helemaal geen raar idee om te veronderstellen dat resultaten uit het verleden geen garantie bieden voor de toekomst. Toch passen tegenwoordig veel verzekeraars dit soort extrapolatie toe bij de waardering van verzekeringscontracten. Sterfteprognose blijft daarom een complex probleem en zal de actuariële wereld de komende tijd nog lang bezighouden.

## Bibliografie

- Bell, W.R. (1997). Comparing and assessing time series methods for forecasting age-specific fertility and mortality rates. *Journal of Official Statistics* 13, 279-303.
- Booth, H. e.a. (2006). Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research* 15, 289-310.
- Cairns, A.J.G., D. Blake en K. Dowd (2005). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty. *Working paper*.
- Carter, L.R. (1996). A comparison of Box-Jenkins ARIMA and structural time series models. *The Sociological Quarterly* 37, 127-144.
- Carter, L.R. en R.D. Lee (1992). Modelling and forecasting US sex differentials in mortality. *International Journal of Forecasting* 8, 393-441.
- Good, I.J. (1969). Some applications of the Singular Decomposition of a Matrix. *Technometrics* 11, 823-831.
- Haberman, S. en M. Russolillo (2005). Lee-Carter mortality forecasting: Application to the Italian population. *Actuarial Research Paper* 167.
- Human Mortality Database (HMD). Homepage ([www.mortality.org](http://www.mortality.org)), 25 april 2008.
- Lee, R.D. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* 4, 80-93.
- Lee, R.D. en L.R. Carter (1992). Modeling and forecasting the time series of U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87, 659-671.
- Lee, R.D. en T. Miller (2001). Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography* 38, 537-549.
- Li, N., R.D. Lee, en S. Tuljapurkar (2004). Using the Lee-Carter method to forecast mortality for populations with limited data. *International Statistic Review* 72, 19-36.
- Renshaw, A. en S. Haberman (2003). Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach for England and Wales mortality projections. *Journal of the Royal Statistical Society* 52, 119-137.
- Tol, J.H. (2008). Forecasting dutch mortality with the stochastic model introduced by Cairns, Blake en Dowd. *Bachelorscriptie Actuarial, Universiteit van Amsterdam*.

# Appendix

Tabel 1 – Parameterschattingen  $a_x$  en  $b_x$

Leeftijds groep	Schatting $a_x$		Schatting $b_x$	
	Mannen	Vrouwen	Mannen	Vrouwen
0	-3,01888	-3,26622	0,10127	0,07790
1-4	-5,45681	-5,62687	0,11833	0,09558
5-9	-6,57441	-6,84930	0,08367	0,07728
10-14	-6,93254	-7,10677	0,07781	0,07699
15-19	-6,36909	-6,72091	0,07530	0,08292
20-24	-6,05638	-6,54988	0,08042	0,08436
25-29	-6,12109	-6,38396	0,08044	0,08069
30-34	-6,05696	-6,16995	0,07395	0,07207
35-39	-5,84388	-5,91071	0,06469	0,06252
40-44	-5,52327	-5,63717	0,05096	0,05047
45-49	-5,12218	-5,31811	0,03846	0,03944
50-54	-4,68684	-4,94230	0,02736	0,03489
55-59	-4,24094	-4,54276	0,02069	0,03223
60-64	-3,78921	-4,06972	0,01730	0,03024
65-69	-3,32580	-3,55661	0,01642	0,02678
70-74	-2,85691	-3,02470	0,01691	0,02270
75-79	-2,37613	-2,50143	0,01655	0,01851
80-84	-1,91050	-2,00900	0,01525	0,01413
85-89	-1,47180	-1,56076	0,01341	0,01118
90-94	-1,08456	-1,16396	0,01081	0,00912

Tabel 2 – Eerste fase schatting  $k_t$  (SVD)

Jaar	Eerste fase schatting $k_t$ (SVD)		Jaar	Eerste fase schatting $k_t$ (SVD)	
	Mannen	Vrouwen		Mannen	Vrouwen
1900	12,86840	15,87072	1940	2,25311	0,61749
1901	12,64823	15,46936	1941	1,74230	1,23861
1902	11,87251	14,86109	1942	2,07322	1,31402
1903	11,34490	13,95586	1943	4,67108	4,03488
1904	11,32541	14,19329	1944	8,36313	7,77308
1905	10,68548	13,58629	1945	13,60354	8,69229
1906	10,06501	13,38642	1946	-0,07833	-0,55976
1907	9,77225	12,90818	1947	-2,99149	-4,05798
1908	9,91681	12,95731	1948	-5,40339	-7,12411
1909	9,04247	12,14532	1949	-5,34759	-7,84439
1910	8,46144	11,76081	1950	-7,20965	-8,70496
1911	9,10106	12,20877	1951	-7,10246	-8,94669
1912	7,40272	10,61945	1952	-8,39985	-10,01406
1913	7,10102	10,10081	1953	-7,11967	-8,62399
1914	7,27571	10,09336	1954	-9,07990	-11,41807
1915	7,41782	10,62616	1955	-9,18222	-11,77875
1916	8,39273	12,04991	1956	-9,52223	-12,29536
1917	9,09459	12,54396	1957	-9,42159	-12,05558
1918	16,34364	20,11290	1958	-9,86203	-12,84720
1919	9,59803	13,38501	1959	-9,04054	-13,25045
1920	7,31086	10,86703	1960	-10,07003	-14,05225
1921	5,25449	8,62972	1961	-9,94150	-14,78178
1922	5,02828	8,48600	1962	-9,69034	-14,14011
1923	3,58593	6,79769	1963	-10,08419	-14,77463
1924	3,11737	6,28766	1964	-9,86832	-14,99459
1925	3,16337	6,11729	1965	-10,31886	-14,91963
1926	2,97229	5,91121	1966	-9,99553	-14,71567
1927	3,30641	6,17720	1967	-9,93903	-15,07946
1928	2,61533	5,27714	1968	-10,06505	-14,99807
1929	3,43038	6,57886	1969	-10,39442	-14,58034
1930	1,57231	4,17987	1970	-10,22570	-14,90503
1931	1,48420	4,16714	1971	-10,57555	-15,79592
1932	0,29451	2,84714	1972	-10,51482	-15,65446
1933	-0,21610	1,94782	1973	-11,21471	-15,46691
1934	-0,68326	1,40630	1974	-11,83680	-16,96184
1935	-0,83934	1,23112	1975	-12,43907	-17,32697
1936	-1,16141	0,97509			
1937	-1,64505	-0,02463			
1938	-1,56094	-0,35359			
1939	-2,53137	-1,34241			

Tabel 3 - Tweede fase schatting  $k_t$  (herschattig)

Jaar	Tweede fase schatting $k_t$ (herschattig)		Jaar	Tweede fase schatting $k_t$ (herschattig)	
	Mannen	Vrouwen		Mannen	Vrouwen
1900	13,86537	17,15894	1940	2,46663	2,94696
1901	13,47736	16,30164	1941	2,39834	3,67756
1902	12,40435	15,46128	1942	1,59825	1,52896
1903	11,94445	14,44991	1943	2,26316	3,00655
1904	12,12656	15,10066	1944	5,94439	6,28145
1905	11,57308	14,31449	1945	13,16552	9,08162
1906	10,88983	13,87563	1946	-3,08432	-1,79082
1907	10,76677	13,63098	1947	-5,23940	-4,00363
1908	11,21403	14,29442	1948	-7,96972	-7,11268
1909	9,80439	12,51702	1949	-5,67037	-3,98646
1910	9,45262	12,26261	1950	-8,54482	-6,71073
1911	10,75786	13,63604	1951	-8,41984	-7,17891
1912	7,92559	10,46613	1952	-10,05765	-8,40275
1913	7,80943	10,39290	1953	-8,65477	-7,66753
1914	7,94444	10,48099	1954	-9,66202	-9,55081
1915	8,02442	10,85449	1955	-9,30947	-10,01475
1916	8,84534	11,72036	1956	-8,96801	-9,39921
1917	9,34253	12,25562	1957	-10,46541	-11,30747
1918	13,85910	17,44688	1958	-10,50108	-11,98819
1919	9,45575	12,80987	1959	-10,22868	-13,03430
1920	7,47622	10,34359	1960	-10,39879	-13,26378
1921	5,82570	8,64094	1961	-10,70808	-14,64170
1922	6,26115	9,64981	1962	-8,85126	-13,95155
1923	3,75174	6,50515	1963	-8,68191	-14,49066
1924	2,67325	5,69453	1964	-10,18730	-16,80123
1925	2,62402	5,35135	1965	-9,19081	-16,08932
1926	2,58863	5,54870	1966	-9,03815	-16,06144
1927	3,47264	6,66294	1967	-9,63007	-18,05819
1928	2,14330	5,05953	1968	-8,39466	-17,17761
1929	4,39546	7,64593	1969	-8,37432	-16,85475
1930	0,74382	3,67492	1970	-7,99331	-17,59252
1931	1,88761	5,19666	1971	-8,40675	-18,32745
1932	0,30105	3,51205	1972	-7,54559	-18,33017
1933	-0,53060	2,83724	1973	-8,97618	-20,52927
1934	-1,52331	1,47665	1974	-10,02570	-22,42223
1935	-0,79114	2,23372	1975	-8,58603	-22,37883
1936	-1,31728	1,97904			
1937	-1,18735	2,06673			
1938	-2,02151	0,70140			
1939	-1,95989	0,74092			

Tabel 4 - Prognose  $k_t$ 

Jaar	Prognose $k_t$		Standaardfout prognose ( $se_t$ )	
	Mannen	Vrouwen	Mannen	Vrouwen
1976	-8,88538	-22,90601	2,57336	2,08074
1977	-9,18474	-23,43318	3,63929	2,94261
1978	-9,48409	-23,96035	4,45720	3,60395
1979	-9,78344	-24,48752	5,14673	4,16148
1980	-10,08279	-25,01470	5,75422	4,65267
1981	-10,38214	-25,54187	6,30343	5,09675
1982	-10,68150	-26,06904	6,80848	5,50512
1983	-10,98085	-26,59622	7,27857	5,88522
1984	-11,28020	-27,12339	7,72009	6,24222
1985	-11,57955	-27,65056	8,13769	6,57987
1986	-11,87890	-28,17774	8,53488	6,90103
1987	-12,17826	-28,70491	8,91439	7,20789
1988	-12,47761	-29,23208	9,27840	7,50221
1989	-12,77696	-29,75925	9,62865	7,78541
1990	-13,07631	-30,28643	9,96660	8,05867
1991	-13,37566	-30,81360	10,29346	8,32296
1992	-13,67502	-31,34077	10,61025	8,57911
1993	-13,97437	-31,86795	10,91786	8,82783
1994	-14,27372	-32,39512	11,21703	9,06973
1995	-14,57307	-32,92229	11,50843	9,30535
1996	-14,87242	-33,44947	11,79264	9,53514
1997	-15,17178	-33,97664	12,07015	9,75953
1998	-15,47113	-34,50381	12,34142	9,97887
1999	-15,77048	-35,03098	12,60686	10,19350
2000	-16,06983	-35,55816	12,86682	10,40370
2001	-16,36918	-36,08533	13,12163	10,60973
2002	-16,66854	-36,61250	13,37159	10,81184
2003	-16,96789	-37,13968	13,61696	11,01024
2004	-17,26724	-37,66685	13,85799	11,20512
2005	-17,56659	-38,19402	14,09490	11,39668



**Tabel 5 – Eviews output ARIMA tijdreeksmodel**

Dependent Variable: D(KAPPAMAN)  
 Method: Least Squares  
 Date: 05/13/08 Time: 13:06  
 Sample(adjusted): 1901 1975  
 Included observations: 75 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.299352	0.297146	-1.007422	0.3170
R-squared	0.000000	Mean dependent var	-0.299352	
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	2.573364	
S.E. of regression	2.573364	Akaike info criterion	4.741548	
Sum squared resid	490.0428	Schwarz criterion	4.772448	
Log likelihood	-176.8081	Durbin-Watson stat	2.410041	

Dependent Variable: D(KAPPAVROUW)  
 Method: Least Squares  
 Date: 05/13/08 Time: 13:06  
 Sample(adjusted): 1901 1975  
 Included observations: 75 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.527173	0.240263	-2.194151	0.0314
R-squared	0.000000	Mean dependent var	-0.527173	
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	2.080739	
S.E. of regression	2.080739	Akaike info criterion	4.316567	
Sum squared resid	320.3811	Schwarz criterion	4.347467	
Log likelihood	-160.8713	Durbin-Watson stat	2.374509	